Übungsstunde 12: www.n.ethz.ch/~michbaum ⇨ Assistenz

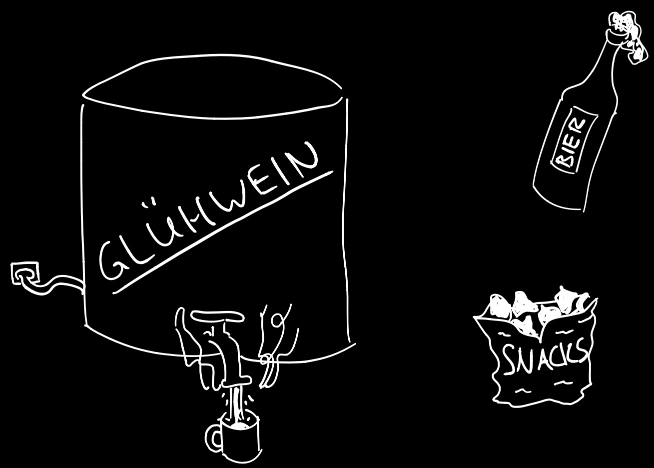
Themen:

- Infos Semesterabschluss 17.12
- Prüfung Herbstsemester 2017

Semesterabschluss:

ToDo's:

- Teilnahme 70
- Helfer
- Tassen
- Besorgungen



Prüfung Herbstsemester 2017:

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) 1 & 3: $1 - \alpha \stackrel{!}{=} 0 \qquad \underline{\underline{\alpha = 1}}$

2 & 3: $1 + \alpha - 2\beta \stackrel{!}{=} 0 \qquad \underline{\underline{\beta = 1}}$

b)

1. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

2. $|\det(A)|$

$$|\det(A)| = |\det(QR)| = |\det(Q)\det(R)|$$

$$= \underbrace{|\det(Q)|}_{1}\,|\det(R)| = \underline{\underline{6}}$$

2. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow C$ symm.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von C.

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

a) $\det(C - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda^{+} & 0_{-} & -3^{+} \\ 0^{-} & 2-\lambda^{+} & 0 \\ -3 & 0^{-} & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$= \underbrace{(2-\lambda)} \big[\underbrace{(2-\lambda)^2 - 9}_{\overset{!}{=} 0} \big] \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = \underline{\underline{2}}$

$\lambda_2 = \underline{\underline{-1}}$

$\lambda_3 = \underline{\underline{5}}$

EV:

$\lambda_1 = 2$: $(A - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = 0 \end{array} \Rightarrow E_2 = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_2 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III - I} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = 0 \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_3 = 5$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -s \end{array} \Rightarrow E_5 = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

b) Symm. Matrix. Versch. EW $\Rightarrow$ EV alle orthogonal

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{b^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{b^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

c)

$$e^C = T e^D T^T \qquad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & & \emptyset \\ & -1 & \\ \emptyset & & 5 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & & \emptyset \\ & e^{-1} & \\ \emptyset & & e^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-1} & e^5 \\ \sqrt{2}e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & -e^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-1}+e^5 & 0 & e^{-1}-e^5 \\ 0 & 2e^2 & 0 \\ e^{-1}-e^5 & 0 & e^{-1}+e^5 \end{bmatrix}}}$$

3. [6 Punkte] Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{P}^k$ den Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $< k$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ definiert für alle $f \in \mathcal{P}^3$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = xf'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1, x, x^2$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1 - x$, $2x$, $4x^2$ und im Bildraum die Basis 2, $\frac{x}{4}$, $\frac{x^2}{3}$. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\ \tilde{B} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "T"'] & \tilde{C} \arrow[d, shift right, "D"'] \\ B \arrow[r, "B"'] \arrow[u, shift right, "S"'] & C \arrow[u, shift right, "V"'] \end{tikzcd}$$

a) 2 Kriterien: $\forall a,b \in \mathcal{P}^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

$$\mathcal{F}(f(x)) = \underbrace{x f'(x)}_{2x^2} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds}$$

Die Abbildung ist zuerst einmal wohldefiniert:

$\mathcal{F}(1) = 1 \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x) = \frac{3}{2}x \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x^2) = \frac{7}{3}x^2 \in \mathcal{P}^3$

i) & ii):

$$\mathcal{F}(a(x) + \alpha b(x)) = x(a(x)+\alpha b(x))' + \frac{1}{x}\int_0^x [a(s) + \alpha b(s)]ds$$

$$= x a'(x) + \alpha x b'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)ds + \alpha \frac{1}{x}\int_0^x b(s)ds$$

$$= x a'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)ds + \alpha\left(x b'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x b(s)ds\right)$$

$$= \mathcal{F}(a(x)) + \alpha \mathcal{F}(b(x)) \quad \square$$

$\Rightarrow$ lineare Abbildung

b) $\mathcal{F}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$

$1 \longrightarrow 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x \longrightarrow \frac{3}{2}x = 0 \quad \frac{3}{2} \quad 0$

$x^2 \longrightarrow \frac{7}{3}x^2 = 0 \quad 0 \quad \frac{7}{3}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

c) F

$$1 - x \longrightarrow 1 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} \cdot 2 - 6 \frac{x}{4} + 0 \frac{x^2}{3}$$

$$2x \longrightarrow 3x = 0 \cdot 2 + 12 \cdot \frac{x}{4} + 0 \frac{x^2}{3}$$

$$4x^2 \longrightarrow \frac{28}{3}x^2 = 0 \cdot 2 + 0 \frac{x}{4} + 28 \frac{x^2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{x}{4} \\ \frac{x^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

4. [6 Punkte] Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$x = \arg\min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2,$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalgleichungen für (1) auf und lösen Sie sie.

Hinweis: Mit der Notation "argmin" in (1) ist das Element $x \in \mathbb{R}^2$ gemeint, welches den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert.

$$S = \begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{bmatrix}$$

$$A x = b$$
$$U S V^T x = b$$
$$S V^T x = U^T b = d$$
$$\hat{S} V^T x = d_0$$
$$x = V \underbrace{\hat{S}^{-1}}_{\hat{S}^+} d_0$$

a)

$$V: \quad A^T A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 26 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}}$$

$$\text{EW:} \quad \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13-2\lambda & -5 \\ -5 & 13-2\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} \frac{13}{2}-\lambda & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{13}{2}-\lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{13}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$= \lambda^2 - 13\lambda + \frac{169}{4} - \frac{25}{4} = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

$$= (\lambda - 9)(\lambda - 4)$$

$$\lambda_1 = \underline{\underline{9}}, \quad \lambda_2 = \underline{\underline{4}} \qquad \Rightarrow \quad \underline{S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\sigma_1 = \underline{\underline{3}} \qquad \sigma_2 = \underline{\underline{2}}$$

EV:

$\lambda_1 = 9: \quad (A - \lambda I)x = 0$

$$\left.\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{G.} \left.\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_9 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = 4:$

$$\left.\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{G.} \left.\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

U:

$$u^{(i)} = \frac{A v^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

$$u^{(1)} = \frac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{3} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & * \\ -1 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$d = U^T \cdot b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ * \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ * \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \hat{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

b)

$$A^T A x = A^T b$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} x = \cancel{\tfrac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 13 & -5 & 4 \\ -5 & 13 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 65 & -25 & 20 \\ 0 & 144 & 72 \end{array}\right]$$

$$x_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$x_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

5. [6 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2[-1,1] \times \mathcal{L}^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert für alle $f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

a) (i) $\langle x(t), a y(t) + b z(t) \rangle = a \langle x(t), y(t) \rangle + b \langle x(t), z(t) \rangle$

(ii) $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle y(t), x(t) \rangle$

(iii) $\langle x(t), x(t) \rangle \geq 0$ & $\langle x, x \rangle = 0 \iff x(t) = 0$

(i)

$$\langle x(t), a y(t) + b z(t) \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) \big(a y(t) + b z(t) \big) dt$$

$$= \int_{-1}^{1} a x(t) y(t) + b x(t) z(t) \, dt$$

$$= a \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, dt + b \int_{-1}^{1} x(t) z(t) \, dt$$

$$= a \langle x(t), y(t) \rangle + b \langle x(t), z(t) \rangle \quad \square$$

(ii)

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, dt = \int_{-1}^{1} y(t) x(t) \, dt = \langle y(t), x(t) \rangle \quad \square$$

(iii)

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{x(t)^2}_{\geq 0} \, dt = \frac{1}{3} x(t)^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} x(t)^3 \Big|_{0}^{1} \geq 0$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} x(t)^2 \, dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = 0$$

b) Induktion:

i) Verankerung $i = 1, 2$

$$\|f_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin(\pi t)^2 \, dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}[\cos(0) - \cos(2\pi t)] \, dt}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\pi t) \, dt} = \sqrt{\Big[\tfrac{t}{2} - \underbrace{\tfrac{1}{4\pi}\sin(2\pi t)\Big]_{-1}^{1}}_{0}}$$

$$= \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\|f_2\| = 1$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t)\sin(2\pi t) \, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\big[\cos(-\pi t) - \cos(3\pi t)\big] \, dt}_{=\qquad 0}$$

ii) $n \to n+1$

$$\|f_n\| = 1 \qquad\qquad \langle f_n, f_{n+1} \rangle = 0$$

$$\|f_{n+1}\| = 1$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} f_k x_k = 0 \iff x_k = 0 \quad \forall k$$

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n = 0 \qquad | \langle f_k , \cdot \rangle$$

$$\langle f_k , f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n \rangle = \langle f_k , 0 \rangle = 0$$

$$x_k = 0 \qquad \forall k$$

d) $\dim(\mathcal{L}^2) = \infty$

$\leadsto$ Haben unendlich viele lineare unabh.

Fkt. gefunden.

6. **[6 Punkte]** Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen (Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort *nicht* begründen).

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

falsch

$AB = BA$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$BA = [4$

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungssystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

richtig

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

richtig

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

falsch

$\det(A) = \det(QR)$

$= \underbrace{\det(Q)}_{\pm 1}\det(R)$

e) Sei $\mathcal{P}^k$ wie in Aufgabe **3.** definiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^5 \to \mathcal{P}^9$ gegeben für alle $f \in \mathcal{P}^5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(xf(x)^2\right), \end{cases}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

falsch

V: $A^TA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Helferliste:

- Sarah Faria -> Kiste Bier (12)
- Lukas & Timon -> Kocher transport, 10 Glühwein
- Efe Eden -> 5 Glühwein
- Gian Gardoni -> 24 Bier
- Doruk Bekatli -> Snacks
- Sevket Baturay -> 5 Glühwein
- Lukas von Briel -> Snacks
- Severin Klapproth -> 10 Glühwein
- Selina/Alina iwas -> Snacks
- Jonas Buchholz -> Glühwein oder Snacks

Übungsstunde 12:

Themen:

- Infos Semesterabschluss 17.12
- Prüfung Herbstsemester 2016

Di: 15:15 - 17.45
CAB G63

Semesterabschluss:

ToDo's:

- Teilnahme 21
- Helfer
- Tassen
- Besorgungen

Prüfung Herbstsemester 2016:

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) $\langle \mathrm{I}, \mathrm{III} \rangle \overset{!}{=} 0 \qquad \underline{\underline{\alpha = 1}}$

$\langle \mathrm{II}, \mathrm{III} \rangle \overset{!}{=} 0 \qquad \underline{\underline{\beta = 1}}$

b)

1. $$A = QR = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{R}$$

2. $$|\det(A)| = |\det(QR)|$$
$$= |\underbrace{\det Q}_{\pm 1} \cdot \det R| = |\det R| = \underline{\underline{6}}$$

2. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von C.

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

$$e^C = T e^D T^{-1}$$

a) EW: $\det(C - \lambda I) \overset{!}{=} 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda^{+} & 0^{-} & -3^{+} \\ 0^{-} & 2-\lambda^{+} & 0^{-} \\ -3^{+} & 0^{-} & 2-\lambda^{+} \end{bmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(2-\lambda)}_{=0} \underbrace{\left[(2-\lambda)^2 - 9 \right]}_{=0}$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 2}}$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 5}}$

$\underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$

EV: $(C - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 2$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = s \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}}$$

$\lambda_2 = 5$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -s \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_5 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

$\lambda_3 = -1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = 0 \\ x_1 = s \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

b)

$$\underline{\underline{b^{(1)} = E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}, \quad b^{(2)} = \frac{E_5}{\|E_5\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad b^{(3)} = \frac{E_{-1}}{\|E_{-1}\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

c)

$$e^C = T e^D T^T \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & & \emptyset \\ & e^5 & \\ \emptyset & & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -e^5 & e^{-1} \\ \sqrt{2}e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^5 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^5 + e^{-1} & 0 & e^{-1} - e^5 \\ 0 & 2e^2 & 0 \\ e^{-1} - e^5 & 0 & e^5 + e^{-1} \end{bmatrix}}}$$

3. [6 Punkte] Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{P}^k$ den Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $< k$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ definiert für alle $f \in \mathcal{P}^3$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = xf'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1, x, x^2$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1-x, 2x, 4x^2$ und im Bildraum die Basis $2, \frac{x}{4}, \frac{x^2}{3}$. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

a) 2 Kriterien: $\forall a,b \in \mathcal{P}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

$$\mathcal{F}(f(x)) = \underbrace{x \cdot f'(x)}_{2x^2} + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds$$

Die Abbildung ist zuerst einmal wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{3}{2}x} \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x^2) = \underline{\frac{7}{3}x^2} \in \mathcal{P}^3$

i) & ii):

$$\mathcal{F}(a+\alpha b) \overset{!}{=} \mathcal{F}(a) + \alpha\mathcal{F}(b)$$

$$= x\left(a(x) + \alpha b(x)\right)' + \frac{1}{x}\int_0^x [a(s) + \alpha b(s)]ds$$

$$= x a'(x) + \alpha x b'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)ds + \frac{\alpha}{x}\int_0^x b(s)ds$$

$$= x a'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)ds + \alpha\left(xb'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x b(s)ds\right)$$

$$= \mathcal{F}(a) + \alpha\mathcal{F}(b) \qquad \square$$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2$$

$$x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{3}{2}x = 0\,1 + \frac{3}{2}x + 0x^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}}}$$

$$x^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{7}{3}x^2 = 0\,1 + 0x + \frac{7}{3}x^2$$

c) $\underset{B}{\{1-x,\ 2x,\ 4x^2\}} \longrightarrow \underset{C}{\left\{2,\ \frac{x}{4},\ \frac{x^2}{3}\right\}}$

$$\begin{tikzcd}
P^3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right] & P^3 \arrow[d, shift right] \\
\tilde{B} \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "T"'] & \tilde{C} \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "\tilde{T}"'] \\
B \arrow[r, "B"'] \arrow[u, shift right, "S"'] & C \arrow[u, shift right, "\tilde{S}"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{T} A S = B$

$$1-x \xrightarrow{F} 1-\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}\,2 - 6\,\frac{x}{4} + 0\,\frac{x^2}{3}$$

$$2x \xrightarrow{F} 3x = 0\cdot 2 + 12\,\frac{x}{4} + 0\,\frac{x^2}{3}$$

$$4x^2 \xrightarrow{F} \frac{28}{3}x^2 = 0\cdot 2 + 0\cdot\frac{x}{4} + 28\cdot\frac{x^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

4. [6 Punkte] Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$x = \arg\min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2,$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalgleichungen für (1) auf und lösen Sie sie.

Hinweis: Mit der Notation "argmin" in (1) ist das Element $x \in \mathbb{R}^2$ gemeint, welches den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert.

$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$V = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$d_0 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$

$$Ax = b$$
$$USV^T x = b$$
$$SV^T x = U^T b = d$$
$$\hat{S} V^T x = d_0$$
$$x = V \underbrace{\hat{S}^{-1}}_{\hat{S}^+} d_0$$

V: $A^TA = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 26 \end{bmatrix}$

$= \underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}}$

EW: $\det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$\det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13-2\lambda & -5 \\ -5 & 13-2\lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \frac{13}{2}-\lambda & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{13}{2}-\lambda \end{bmatrix}$

$= \left(\frac{13}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{25}{4} \overset{!}{=} 0 = \lambda^2 - 13\lambda + 36$

$= (\lambda - 9)(\lambda - 4)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4$

$\sigma_1 = \underline{3}, \quad \sigma_2 = \underline{2} \qquad \Rightarrow S = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

EV: $(A^T A - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 9$: $\begin{matrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\quad x_2 = s$, $x_1 = -s$ $\Rightarrow E_9 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$= \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda_2 = 4$: $\begin{matrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\quad x_2 = s$, $x_1 = s$ $\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$= \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{4-\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4-\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & * \\ -1 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$d = U^T b = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ * \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\, d_0 \\ \}\, d_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$x = V\hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left(\hat{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

b)

$$A^T A x = A^T b$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{cc} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{array}\right| \begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cc} 65 & -25 \\ 0 & 144 \end{array}\right| \begin{array}{c} 20 \\ 72 \end{array} \qquad \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{2}}} \quad \underline{\underline{x_1 = \frac{1}{2}}}$$

5. [6 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2[-1,1] \times \mathcal{L}^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert für alle $f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

$x, y, z \in \mathcal{L}^2$

$a \in \mathbb{R}$

a) i) $\langle x, y + a z \rangle = \langle x, y \rangle + a \langle x, z \rangle$

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

b) Induktion:

$n = 1, 2$:

$\|f_1\| = 1 = \sqrt{\int_{-1}^{1} f_1^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin^2(\pi x) dx} = 1$

$\|f_2\| = 1 = \sqrt{\int_{-1}^{1} f_2^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin^2(2\pi x) dx}$

$= \sqrt{\frac{1}{2} \underbrace{\int_{-1}^{1} 1}_{} - \underbrace{\cos(4\pi x)\, dx}_{0}}$

$= 1$

$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 = \int_{-1}^{1} \sin(\pi x) \sin(2\pi x) dx = 0$

ii) $n \to n+1$

$\|f_n\| = 1$

$\|f_{n+1}\| = 1$

$\langle f_n, f_{n+1} \rangle = 0$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} f_k x_k = 0 \iff x_k = 0 \quad \forall k$$

$$\langle f_k, \cdot \rangle \Big| \quad \underbrace{\langle f_k, f_1 \rangle}_{0} x_1 + \underbrace{\langle f_k, f_2 \rangle}_{0} x_2 + \dots + \underbrace{\langle f_k, f_k \rangle}_{1} x_k + \dots + \underbrace{\langle f_k, f_n \rangle}_{0} x_n = 0$$

$$x_k = 0 \quad \forall k$$

6. **[6 Punkte]** Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen (Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort *nicht* begründen).

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungssystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

e) Sei $\mathcal{P}^k$ wie in Aufgabe **3.** definiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^5 \to \mathcal{P}^9$ gegeben für alle $f \in \mathcal{P}^5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(xf(x)^2\right), \end{cases}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

AB = BA ?

falsch

AB = [1

BA = [4

wahr

wahr

falsch

falsch

falsch

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$